

tremely stable at high pressure and low magnetic field. Near the boundary between the stable and unstable states it was possible to induce similar oscillations of the electron temperature in the stable state as well. A qualitative interpretation of the observed phenomena is obtained from the energy balance of the electron gas, taking into account the thermal conduction perpendicular to the magnetic field. Allowance should be made, moreover, for the fact that the entire plasma rotates in the $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ direction. This model allows the behaviour of the plasma to be explained qualitatively. Finally the Q-PIG discharge is compared with both conventional PIG discharges and various other types of discharges.

This work was undertaken as part of the joint research programme between the Institut für Plasmaphysik and EURATOM.

Acknowledgments

The author is indebted to Prof. R. WIENECKE for his active support and numerous valuable discussions. He is grateful to Dr. G. LANDAUER for various helpful suggestions concerning the experimental approach. His special appreciation goes to Dr. H. M. MAYER and Dr. M. TUTTER for their unfailing readiness to discuss the experimental and theoretical problems involved. Finally, he should like to thank Mrs. G. STÖCKERMANN for her patience and care in evaluating the probe measurements.

Zur Rayleigh-Taylor-Instabilität eines rotierenden Wasserstofflichtbogens im axialen Magnetfeld

H. F. DÖBELE

Institut für Plasmaphysik, Garching bei München

(Z. Naturforsch. **25 a**, 273—282 [1970]; eingegangen am 28. November 1969)

The Rayleigh-Taylor instability of a rotating hydrogen arc in an axial magnetic field is investigated with allowance for electrical conduction, heat conduction and viscosity. The r -depending part of the perturbation was assumed to be in the form of a half-period of a standing wave. The corresponding dispersion relation is derived in the WKB-approximation and is solved numerically. In contrast with the case without dissipation, the frequencies and growth rates of the different modes depend on the parameters of the unperturbed plasma column. The calculation shows, in qualitative agreement with the experiment, that with increasing magnetic field the highest growth rate passes successively to the next higher mode.

I. Einführung

In einer früheren Veröffentlichung¹ ist über das Auftreten von Rayleigh-Taylor-Instabilitäten an einem rotierenden Wasserstofflichtbogen mit Hohl-anode in einem axialen Magnetfeld berichtet worden. Der Bogen brannte bei etwa 3–4 Torr über eine Länge von 12 cm zwischen einer Wolframkathode und einer rohrförmigen Anode aus Kupfer. Die Stromstärke betrug für die meisten Messungen 1600 A. Magnetfeldstärken bis 28 kG konnten erreicht werden. Die Rotation wird hervorgerufen durch die $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ -Kraft, die mit der radialen Stromdichtekomponente in der Anode verbunden ist. Die Rotationsgeschwindigkeit wurde aus dem Doppler-Effekt der Linie 3995 Å des in geringer Menge zugefügten Stickstoffs bestimmt. Sie erreicht am Bogenrand den Wert $2,8 \cdot 10^6$ cm/sec. Die Instabilität zeigt sich in Form von periodischen Lichtintensitäts-

schwankungen der vom Bogenrand ausgehenden Strahlung. Die beobachteten Frequenzen liegen je nach Magnetfeldstärke zwischen 0,9 und 1,45 MHz und entsprechen den Moden $m=4$ (bei 16 kG) bis $m=7$ (bei 26 kG). Die Amplituden erreichen maximal 10% des Intensitätsmittelwertes. Die verschiedenen Moden wurden durch „end-on“-Beobachtung der Phasenlage der Signale am Bild des Innenrandes der Anode mit zwei Photomultipliern und nachfolgender Korrelationselektronik identifiziert. Man findet, daß die azimutale Wellenzahl m in der Weise von der Magnetfeldstärke abhängt, daß mit steigender Feldstärke nacheinander höhere Moden auftreten. Durch Beobachtung der Störungen unmittelbar vor beiden Elektroden findet man, daß bei voll ausgebildeter Instabilität keine meßbare Verschraubung besteht; d. h. es liegt eine „Flute“-Instabilität vor mit parallel zu den Magnetfeldlinien verlaufenden Störungen.

Sonderdruckanforderungen an Dr. H. F. DÖBELE, Institut für Plasmaphysik, D-8046 Garching bei München.

¹ H. F. DÖBELE, Z. Naturforsch. **24 a**, 1249 [1969].



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

II. Rotationsinstabilität in der Näherung der idealen Magnetohydrodynamik

Die Stabilität einer mit der Winkelgeschwindigkeit Ω in einem achsenparallelen Magnetfeld starr rotierenden, zylindersymmetrischen Plasmasäule ohne Dissipation wurde von TAYLOR² und HAINES³ untersucht. Wir wollen die Herleitung der Dispersionsbeziehung daher nur kurz umreißen:

Das Plasma wird durch die folgenden Gleichungen beschrieben:

$$\partial \varrho / \partial t + \operatorname{div} \varrho \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

$$dp/d\varrho = \gamma \cdot p/\varrho, \quad (2)$$

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (3)$$

$$\varrho \cdot d\mathbf{v}/dt = -\operatorname{grad} p + \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \quad (4)$$

Hinzu kommen die Maxwell'schen Gleichungen.

Im ungestörten Zustand ist die azimutale Geschwindigkeit $v_\varphi = \Omega \cdot r$. In axialer Richtung soll keine Strömung und auch kein elektrischer Strom vorhanden sein. In φ -Richtung ist ein Strom $j_\varphi(r)$ zugelassen. Dementsprechend hat die Magnetfeldstärke nur eine z -Komponente $B_z(r)$. Die Gleichgewichtsbedingung lautet:

$$\frac{d}{dr} \left(p_0 + \frac{B_z^2}{2\mu_0} \right) = \varrho_0 \Omega^2 \cdot r. \quad (5)$$

Dabei sind $p_0(r)$ und $\varrho_0(r)$ die Druck- bzw. Dichteverteilung im Gleichgewicht.

Von den erwähnten Gleichgewichtsgrößen geht man zu folgenden Größen über:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}^* = (v_r^*; v_\varphi + v_\varphi^*; 0) \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}^* = (0; 0; B_z + B_z^*) \\ \mathbf{j} &= \mathbf{j}_0 + \mathbf{j}^* = (j_r; j_\varphi + j_\varphi^*; 0) \\ \varrho &= \varrho_0 + \varrho^* \\ p &= p_0 + p^*. \end{aligned}$$

Es läßt sich zeigen³, daß B_r^* und B_φ^* verschwinden.

Es werden inkompressible Störungen² der Form

$$x^*(r, \varphi, t) = \hat{x}(r) e^{i(\omega t + m\varphi)} \quad (6)$$

betrachtet, und aus den linearisierten Gln. (1) bis (3) die Störgrößen für Dichte ϱ^* , Druck p^* und die z -Komponente des Magnetfeldes B_z^* gewonnen, die sämtlich die folgende Gestalt haben:

$$x^* = \frac{i}{\omega'} v_r^* \frac{dx_0}{dr}; \quad x = \begin{cases} \varrho \\ p \\ B_z \end{cases}. \quad (7)$$

² J. B. TAYLOR, Plasma Physics 4, 401 [1962].

Dabei wurde zur Abkürzung $\omega' = \omega + m\Omega$ gesetzt. dx_0/dr bezeichnet den entsprechenden Gradienten im ungestörten Zustand.

Diese Störgrößen werden in die Bewegungsgleichung (4) eingesetzt, nachdem man diese linearisiert hat. Mit (5) und den Maxwell-Gleichungen erhält man daraus folgende Gleichung für die r -Komponente:

$$i\omega' v_r^* + \left(\frac{m\Omega^2}{\omega'} - 2\Omega \right) v_\varphi^* = 0 \quad (8)$$

und für die φ -Komponente:

$$i\omega' v_\varphi^* - \left(\frac{m\Omega^2}{\omega'} - 2\Omega \right) v_r^* = 0. \quad (9)$$

Wir multiplizieren (8) mit $-i$ und addieren (9). Wir definieren formal eine neue Geschwindigkeit $v^* = v_r^* + i v_\varphi^*$ und erhalten:

$$\left(\omega' - \frac{m\Omega^2}{\omega'} + 2\Omega \right) v^* = 0. \quad (10)$$

Für die erste Lösung ergibt sich:

$$\omega = -(m+1)\Omega \pm \Omega \sqrt{m+1}. \quad (11)$$

Diese Frequenz ist rein reell. Die zweite Lösung lautet $v^* = 0$, oder:

$$v_r^* = -i v_\varphi^*. \quad (12)$$

Dies ist Taylors "universal mode". Setzt man (12) in (8) oder auch (9) ein, so findet man die Lösung

$$\omega = -(m-1)\Omega \pm i\Omega \sqrt{m-1}. \quad (13)$$

Diese Dispersionsbeziehung beschreibt Wellen, die sich – vom Laborsystem aus gesehen – in der Umdrehungsrichtung der Plasmasäule ausbreiten, aber etwas hinter dieser zurückbleiben. Langwellige Störungen bleiben dabei mehr zurück als kurzwelligere. Auffallend an (13) ist insbesondere, daß die Frequenzen und Anwachsraten unabhängig von der Druck- und Dichteverteilung im ungestörten Zustand sind.

Zur Bestimmung des r -abhängigen Amplitudenfaktors $\hat{x}(r)$ gehen wir von der Inkompressibilität $\operatorname{div} \mathbf{v}^* = 0$ (vgl. ²) aus

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r^*) + \frac{i}{r} m v_\varphi^* = 0. \quad (14)$$

Mit (12) ergibt sich

$$v_\varphi^* \sim r^{m-1}. \quad (15)$$

³ M. G. HAINES, Adv. Physics 14, 167 [1965].

Diese Abhängigkeit zeigt, daß der Amplitudenfaktor für große m im Zentrum der Plasmasäule praktisch verschwindet, und daß sich die Instabilität auf die Randzonen konzentriert. Bezeichnet man den Rand der Plasmasäule mit R und mit D die Breite der Zone, die durch den Rand und diejenige Stelle begrenzt wird, an der die Amplitudenfunktion auf $1/e$ des Maximalwertes am Rand abgenommen hat, so gilt für $m \gg 1$:

$$D \approx R/m. \quad (16)$$

Die Instabilität ist also am Rand lokalisiert, und die an der Instabilität beteiligte Zone wird proportional m schmaler.

III. Theorie mit Dissipation

Der Vergleich der experimentellen Befunde mit der im vorangegangenen Abschnitt dargelegten dissipationsfreien Theorie zeigt neben übereinstimmenden Resultaten (siehe ¹) auch deutliche Diskrepanzen. Insbesondere die im Experiment beobachtete Abhängigkeit der azimutalen Wellenzahl m von der Magnetfeldstärke kann nicht erklärt werden. Zunächst sei erwähnt, daß Stabilisierung durch endliche Larmor-Radien der Ionen, die beispielsweise im Fall des rotierenden Thetapinch-Plasmas ⁴ für das Ausbleiben von Moden mit $m > 2$ verantwortlich ist, im vorliegenden Fall ausscheidet, weil die Gyroradien sehr klein im Vergleich zu den Dimensionen des Plasmas und der Störungen sind.

Die Frage, ob die dissipativen Mechanismen (el. Widerstand, Wärmeleitfähigkeit und Viskosität) eine Rolle spielen, läßt sich an Hand der entsprechenden charakteristischen Zeiten abschätzen, die angeben, nach welcher Zeit eine Störung durch Dissipation wieder ausgeglichen ist. Die Abschätzungen zeigen, daß man insbesondere für Moden mit großem m mit dissipativen Effekten rechnen muß, da die charakteristischen Zeiten proportional $1/m^2$ sind. Man wird außerdem auch nicht erwarten können, daß auch im Fall mit Dissipation Frequenzen und Anwachsraten unabhängig von den Plasmagrößen des ungestörten Zustands sind. Da im Fall des Bogenplasmas sowohl die Druck- und Dichteverteilung

(vgl. WIENECKE ⁵), wie auch die Transportkoeffizienten vom Magnetfeld abhängen, kann man hier einen magnetfeldabhängigen Stabilisierungsmechanismus für Moden mit großem m vermuten.

a) Erweiterung der Grundgleichungen

Neben der Kontinuitätsgleichung (1) verwenden wir die Energiegleichung in der folgenden Form ⁶:

$$\varrho \frac{du}{dt} = -p \operatorname{div} \mathbf{v} - \operatorname{div} \mathbf{q} + \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma}. \quad (17)$$

Dabei ist u die innere Energie pro Gramm, \mathbf{q} der Wärmestrom und σ die elektrische Leitfähigkeit.

Für ein vollionisiertes Plasma kann man auch schreiben ⁷:

$$\frac{3}{2} \frac{dp}{dt} + \frac{5}{2} p \operatorname{div} \mathbf{v} + \operatorname{div} \mathbf{q} = \mathbf{j}^2 / \sigma. \quad (18)$$

Die Bewegungsgleichung mit Viskosität lautet:

$$\varrho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \mu \left(\frac{4}{3} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v} \right). \quad (19)$$

Das Ohmsche Gesetz verwenden wir in der Form:

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (20)$$

Verschiedene Untersuchungen (z. B. ⁸) zeigen, daß der Einfluß des weggelassenen Druck- und Hall-Terms auf die Stabilität ohne maßgeblichen Einfluß ist.

b) Störansatz

Im Falle ohne Dissipation hatte sich gezeigt, daß sich die Instabilität in einer schmalen Zone am Rand der Plasmasäule abspielt. Wir betrachten daher auch hier Moden, die am Rand lokalisiert sind. Im Gegensatz zu dem in Abschn. II behandelten Modell findet jedoch beim Lichtbogenplasma am Rande neben dem Abfallen der Rotationsgeschwindigkeit ein stetiger Übergang ins Neutralgas statt, so daß dort die Amplitudenfunktion $\hat{x}(r)$ [vgl. Gl. (6)] verschwinden muß. Wir versuchen daher die Amplitudenfunktion als Halbperiode einer Kosinusfunktion darzustellen, die sich als stehende Welle und damit als Überlagerung einer radial ein- und einer auslau-

⁴ N. ROSTOKER u. A. C. KOLB, Phys. Rev. **124**, 995 [1961].

⁵ R. WIENECKE, Z. Naturforsch. **18a**, 1151 [1963].

⁶ W. FINKELNBURG u. H. MAECKER, in: Handbuch der Physik, Bd. XXII, Hrsg. S. FLÜGGE, Springer-Verlag, Berlin 1956.

⁷ Gleichung (18) gilt auch für ein teilweise ionisiertes Plasma, wenn die Störungen sich schnell im Vergleich zur Einstellzeit des Ionisationsgleichgewichtes abspielen. Man erhält in diesem Fall dieselbe Dispersionsbeziehung.

⁸ B. BUTI, M. S. DIXIT, N. K. NAYYAR u. S. K. TREHAN, Nuclear Fusion **5**, 17 [1965].

fenden Welle beschreiben läßt. Unter Annahme von WKB-Bedingungen (schwache Änderung der Plasma-parameter über eine Wellenlänge) machen wir für die Wellen den folgenden Ansatz:

$$x^*(r, \varphi, t) = \bar{x} \cdot e^{i(jk_r dr + m\varphi + \omega t)}. \quad (21)$$

Dabei hängt k_r nur schwach von r ab. Für die vor kommenden Ableitungen nach r kann man jetzt $i k_r x^*$ schreiben. Auf diese Weise wird das Problem algebraisch. An die Stelle der Randbedingungen tritt nun die Bedingung, daß die Überlagerung der ein- und der auslaufenden Welle eine stehende Welle bilden muß, damit am Bogenrand alle Störungen zeitunabhängig verschwinden. Wir schreiben zur Abkürzung

$$L k_r = l, \quad (22)$$

wobei L denjenigen Radius bezeichnet, an welchem die Instabilität lokalisiert ist. Ferner ist zugelassen, daß l komplex ist, was einer räumlichen Dämpfung der Welle entspricht:

$$l = \pm l_R + i l_I. \quad (23)$$

Die beiden Vorzeichen von l_R entsprechen den beiden verschiedenen Ausbreitungsrichtungen.

c) Linearisierung und Herleitung der Dispersionsbeziehung

Unter Berücksichtigung des Störansatzes (21) linearisieren wir nun die Grundgleichungen. Für die Transportkoeffizienten lassen wir keine Störungen zu. Gradienten der Transportkoeffizienten sollen unberücksichtigt bleiben. Obwohl die Rotationsgeschwindigkeit des Plasmas nach außen abfällt, wollen wir dennoch mit konstantem Ω rechnen. Auf den qualitativen Einfluß des Abfallens der Rotationsgeschwindigkeit wird bei der Diskussion der Ergebnisse eingegangen werden. Zur Abkürzung setzen wir $\text{div } \mathbf{v}^* = U^*$ und erhalten dann aus der Kontinuitätsgleichung (1) für die gestörte Dichte:

$$\varrho^* = \frac{i}{\omega'} v_r^* \frac{d\varrho_0}{dr} + \frac{i}{\omega'} \varrho_0 U^*. \quad (24)$$

Dabei ist wiederum

$$\omega' = \omega + m \Omega = \omega'_R - i \gamma, \quad (25)$$

wobei γ die Anwachsrate bedeutet.

Die Linearisierung des Ohmschen Gesetzes liefert

$$i \omega' \mathbf{B}^* = \text{rot}(\mathbf{v}^* \times \mathbf{B}_0) + \text{rot}(\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}^*) - \frac{1}{\mu_0 \sigma} \text{rot rot } \mathbf{B}^*. \quad (26)$$

Die Störgrößen sind dabei dieselben⁹ wie in Abschnitt II. Wenn wir eine charakteristische Frequenz für Magnetfelddiffusion durch

$$\omega_\sigma = 1/\mu_0 \sigma L^2 \quad (27)$$

eingeführen, und zur Abkürzung

$$l^2 + m^2 = n^2 \quad (28)$$

setzen, so erhalten wir für die z -Komponente

$$B_z^* = \frac{i v_r^*}{\omega' - i n^2 \omega_\sigma} \frac{dB_z}{dr} + \frac{i B_z U^*}{\omega' - i n^2 \omega_\sigma}. \quad (29)$$

Aus der Energiegleichung (18) bekommt man mit $\mathbf{q} = -\kappa \text{ grad } T$ (κ = Wärmeleitfähigkeit):

$$i \omega' p^* + \frac{dp_0}{dr} v_r^* + \frac{5}{3} p_0 U^* - \frac{2}{3} \kappa \Delta T^* = \frac{4 i \omega_\sigma L l}{3 \mu_0} \frac{dB_z}{dr} B_z^*. \quad (30)$$

Der Term $\Delta T^* \approx -(n^2/L^2) T^*$ kann durch p^* und ϱ^* ausgedrückt werden. Mit (24) folgt dann für die Druckstörung die Beziehung:

$$p^* = \frac{i}{\omega'} v_r^* \frac{dp_0}{dr} - \frac{1}{\omega'(\omega' - i n^2 \omega_\sigma)(\omega' - i n^2 \omega_\sigma)} \cdot \{K_1 v_r^* - K_2 U^*\}. \quad (31)$$

Dabei ist ω_σ , die charakteristische Frequenz für Wärmeleitung, gegeben durch:

$$\omega_\sigma = \frac{2 T_0 \kappa}{3 p_0 L^2}. \quad (32)$$

Die Koeffizienten K_1 und K_2 lauten:

$$K_1 = n^2 \omega_\sigma (\omega' - i n^2 \omega_\sigma) \frac{p_0}{T_0} \frac{dT_0}{dr} - \frac{4 i \omega_\sigma \omega' l L}{3 \mu_0} \left(\frac{dB_z}{dr} \right)^2, \quad (33 a)$$

$$K_2 = p_0 (\omega' - i n^2 \omega_\sigma) \left(\frac{5}{3} i \omega' + n^2 \omega_\sigma \right) + \frac{4 i \omega_\sigma \omega' l L}{3 \mu_0} B_z \frac{dB_z}{dr}. \quad (33 b)$$

Dabei ist dB_z/dr durch (5) festgelegt. Nachdem nun B_z^* , p^* und ϱ^* durch v_r^* und U^* ausgedrückt sind, werden sie in die linearisierte Bewegungsgleichung eingesetzt. Dies liefert nach einer Reihe von Umformungen zwei Gleichungen für die r - und die φ -Komponente in den Unbekannten v_r^* und U^*

⁹ Wenn man auch transversale Störkomponenten von \mathbf{B} berücksichtigt, so stellt sich heraus, daß diese nur untereinander und nicht mit den übrigen Störgrößen verknüpft sind. Für das vorliegende Problem können wir daher wie früher schon von ihnen absehen.

$$v_r^* \left\{ \omega' - i n^2 \omega_\mu - 2 i \frac{l}{m} \Omega + i l \frac{\Omega^2}{\omega'} - \frac{l K_1}{L \varrho_0 \omega' (\omega' - i n^2 \omega_o) (\omega' - i n^2 \omega_\kappa)} - \frac{l B_z}{L \varrho_0 \mu_0} \cdot \frac{n^2 \omega_o}{\omega' (\omega' - i n^2 \omega_o)} \frac{dB_z}{dr} \right\} \\ + U^* \left\{ 2 \frac{L}{m} \Omega - \frac{l L}{3} \omega_\mu - \frac{\Omega^2}{\omega'} L + \frac{l K_2}{L \varrho_0 \omega' (\omega' - i n^2 \omega_o) (\omega' - i n^2 \omega_\kappa)} + \frac{i l B_z^2}{L \varrho_0 \mu_0 (\omega' - i n^2 \omega_o)} \right\} = 0 \quad (34 a)$$

und

$$v_r^* \left\{ \frac{l}{m} (\omega' + i n^2 \omega_\mu) + 2 i \Omega - i m \frac{\Omega^2}{\omega'} + \frac{m K_1}{L \varrho_0 \omega' (\omega' - i n^2 \omega_o) (\omega' - i n^2 \omega_\kappa)} + \frac{m B_z n^2 \omega_o}{L \mu_0 \varrho_0 \omega' (\omega' - i n^2 \omega_o)} \frac{dB_z}{dr} \right\} \\ + U^* \left\{ i \frac{L}{m} \omega' - L \omega_\mu \left(\frac{l^2}{m} - \frac{4}{3} m \right) - \frac{m K_2}{L \varrho_0 \omega' (\omega' - i n^2 \omega_o) (\omega' - i n^2 \omega_\kappa)} - \frac{i m B_z^2}{L \varrho_0 \mu_0 (\omega' - i n^2 \omega_o)} \right\} = 0. \quad (34 b)$$

Dabei ist die charakteristische Frequenz für Viskosität gegeben durch

$$\omega_\mu = \mu / L^2 \varrho_0. \quad (35)$$

Für v_r^* und U^* existieren nichttriviale Lösungen, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet. Nach Beseitigung von ω' aus den Nennern und einigen weiteren Umformungen lautet diese

$$D(\omega', l) = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad (36)$$

mit

$$A_{11} = \omega' [\omega' + i \omega_\mu (l^2 - m^2)] n^2, \quad (36 a)$$

$$A_{12} = i l \omega'^2 - i l \omega_\mu \omega' (l^2 - m^2) - m^2 \Omega \left(\Omega - \frac{2}{m} \omega' \right), \quad (36 b)$$

$$A_{21} = (\omega' - i n^2 \omega_o) (\omega' - i n^2 \omega_\kappa) \cdot \left\{ \omega' (\omega' - i n^2 \omega_\mu) + i l \Omega \left(\Omega - \frac{2}{m} \omega' \right) \right\} \\ - (\omega' - i n^2 \omega_\kappa) \frac{l}{L} n^2 \omega_o \frac{B_z}{\mu_0 \varrho_0} \frac{dB_z}{dr} - \frac{l}{L} \frac{K_1}{\varrho_0}, \quad (36 c)$$

$$A_{22} = -(\omega' - i n^2 \omega_o) (\omega' - i n^2 \omega_\kappa) \cdot \left\{ \Omega \left(\Omega - \frac{2}{m} \omega' \right) + \frac{\omega'}{3} l \omega_\mu \right\} \\ + i \frac{l}{L^2} (\omega' - i n^2 \omega_\kappa) \omega' \frac{B_z}{\mu_0 \varrho_0} + \frac{l}{L^2} \frac{K_2}{\varrho_0}. \quad (36 d)$$

Zum Unterschied von (13) ist die Dispersionsbeziehung (36) abhängig von den Plasmagrößen im ungestörten Zustand. Damit stehende Wellen existieren, muß gleichzeitig mit $D(\omega'_R, \gamma, l_R, l_I) = 0$ auch die Beziehung $D(\omega'_R, \gamma, -l_R, l_I) = 0$ erfüllt sein. Wir haben also folgendes reelles Gleichungssystem für die vier Unbekannten ω'_R, γ, l_R und l_I :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{D(\omega'_R, \gamma, l_R, l_I)\} &= 0, \\ \operatorname{Im}\{D(\omega'_R, \gamma, l_R, l_I)\} &= 0, \\ \operatorname{Re}\{D(\omega'_R, \gamma, -l_R, l_I)\} &= 0, \\ \operatorname{Im}\{D(\omega'_R, \gamma, -l_R, l_I)\} &= 0. \end{aligned} \quad (37)$$

d) Modell des ungestörten Bogens

Zur Lösung des Gleichungssystems (37) ist die Kenntnis der Temperatur-, Dichte- und Druckverteilung sowie der charakteristischen Frequenzen ω_o, ω_κ und ω_μ in der ungestörten Plasmasäule notwendig. Direkte Messungen der genannten Größen sind im experimentellen Teil¹ nicht vorgenommen worden. Inzwischen wurden von SCHWENN¹⁰ Messungen mit Potentialsonden und magnetischen Sonden an einer vergleichbaren Bogenanordnung durchgeführt, aus denen sich der in Abb. 1 dargestellte Temperatur-

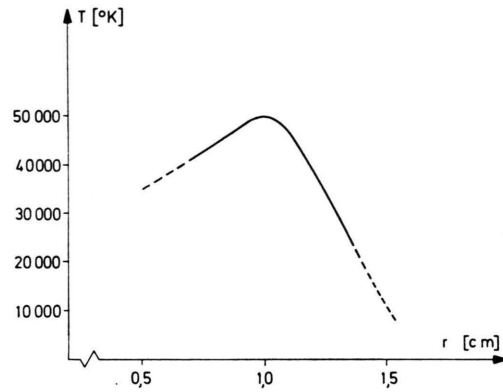


Abb. 1. Temperaturprofil nach SCHWENN¹⁰.

verlauf folgern läßt. Zur Vereinfachung der Lösung der Dispersionsbeziehung wollen wir annehmen, daß die Temperaturverteilung für alle Magnetfeldstärken dieselbe sei. Bei einer gegebenen Temperaturverteilung, festen Werten für Umgebungsdruck p_A und Feldstärke B_z ist bei Gültigkeit einer bestimmten Ionisationsformel die Druck- und Dichteverteilung in einer ruhenden, zylindersymmetrischen Plasmasäule festgelegt (vgl. WIENECKE⁵). Detaillierte Rech-

¹⁰ R. SCHWENN, wird veröffentlicht.

nungen wurden von RAEDER und WIRTZ¹¹ für ein Wasserstoffplasma unter Verwendung der Saha-Formel und neuester Ergebnisse für die Wirkungsquerschnitte durchgeführt. Mit Hilfe dieses Maschinenprogrammes und des Temperaturverlaufs der Abb. 1 wurden die Druckverteilungen für die verschiedenen Magnetfeldstärken berechnet (Abb. 2). Dabei blieb der Einfluß der Rotation auf die Druckverteilung außer Acht.

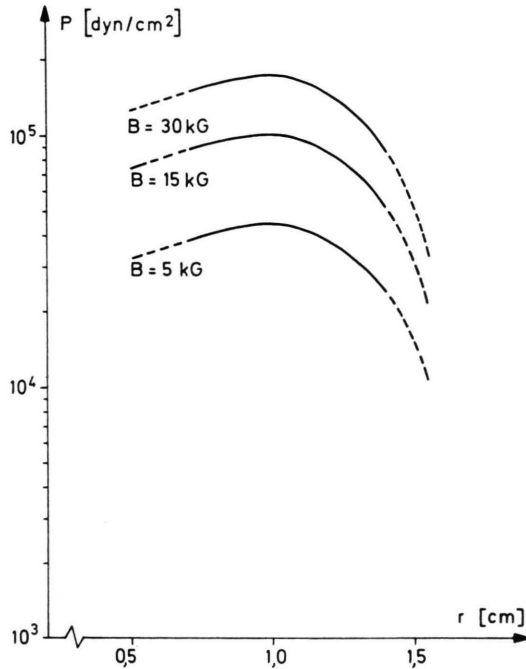


Abb. 2. Druckprofil für verschiedene Magnetfeldstärken.

e) Transportkoeffizienten

Zur Berechnung von ω_o gehen wir von folgendem Ausdruck für die Leitfähigkeit aus⁶

$$\sigma = \frac{3}{8 e^2 \ln A} \sqrt{\frac{\pi (kT)^3}{2 m_e}}. \quad (38)$$

Dabei ist

$$A = \frac{3}{2 e^3} \sqrt{\frac{(kT)^3}{n_e \pi}}. \quad (39)$$

Die charakteristische Frequenz läßt sich nun nach (27) berechnen, wobei wir noch einen Faktor 2 berücksichtigen müssen, da sich die Störungen immer senkrecht zur Richtung des Magnetfeldes abspielen.

Für die Gesamtwärmeleitfähigkeit κ , die zur Berechnung von ω_κ notwendig ist, wurde die Arbeit von RAEDER und WIRTZ¹¹ herangezogen und das Maschinenprogramm direkt für das vorliegende Problem übernommen.

Die Ionenviskosität parallel zum Magnetfeld ist nach KAUFMANN¹² gegeben durch:

$$\mu_{i\parallel} = \frac{5}{8} \frac{(kT)^{5/2} \sqrt{m_i}}{\sqrt{\pi} e^4 \ln A}. \quad (40)$$

Die Elektronen sind auf die Viskosität praktisch ohne Einfluß. Für die Viskosität senkrecht zum Magnetfeld wurde

$$\mu_{i\perp} = \frac{1}{1 + 4(\omega_i \tau_i)^2} \mu_{i\parallel} \quad (41)$$

verwendet (vgl. hierzu¹²). Dabei ist ω_i die Ionen-gyrofrequenz und τ_i die Flugzeit der Ionen. Für τ_i gilt nach BRAKINSKII¹³:

$$\tau_i = \frac{3 \sqrt{m_i} (kT)^{3/2}}{4 \sqrt{\pi} e^4 n_i \ln A}. \quad (42)$$

Streng genommen werden die beiden zum Magnetfeld senkrechten Richtungen in verschiedener Weise gegenüber der Parallelviskosität geändert. Von einer derartigen Korrektur wollen wir aber absehen, zumal sich ω_μ erheblich kleiner als die beiden anderen charakteristischen Frequenzen erweist. In den Abb. 3, 4 und 5 ist der Verlauf der charakteristischen Frequenzen ω_o , ω_κ und ω_μ über dem Radius für verschiedene Magnetfeldstärken dargestellt.

j) Numerische Lösung der Dispersionsbeziehung

Zur Lösung der Dispersionsbeziehung (37) wurde der Temperaturverlauf der Abb. 1 stückweise durch Parabelzüge angenähert. Mit dem von RAEDER und WIRTZ¹¹ übernommenen Programm wurden für den Umgebungsdruck $p_A = 3,5$ Torr und ein bestimmtes Ausgangsmagnetfeld B_A die zur jeweiligen Temperatur an der Stelle L gehörigen Drucke und Teilchendichten berechnet.

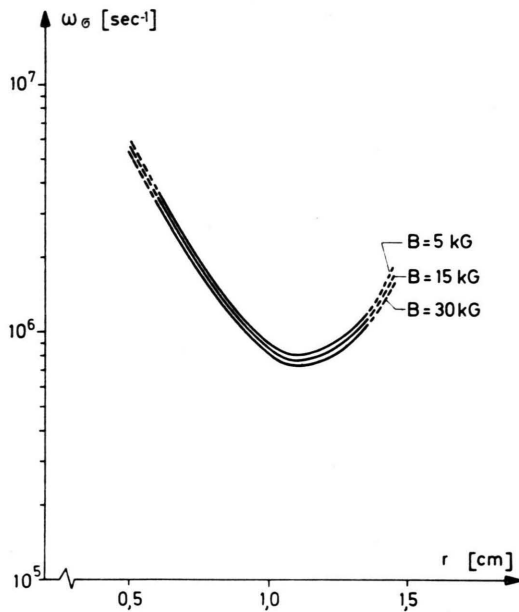
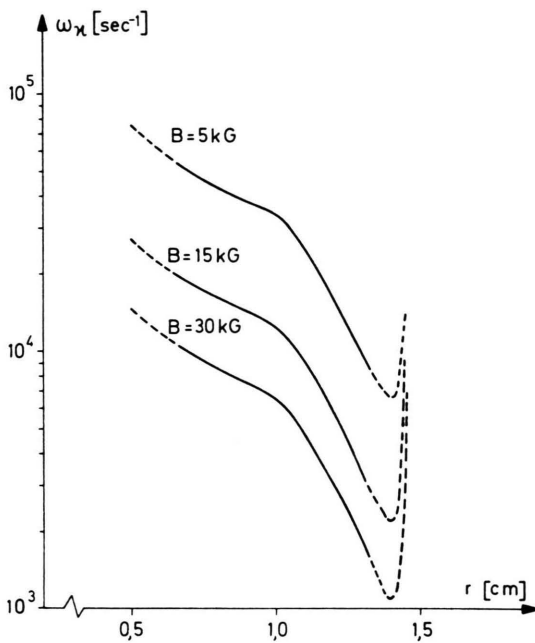
Für Ω wurde entsprechend dem experimentellen Ergebnis der Wert $\Omega = 2,8 \cdot 10^6 \text{ sec}^{-1}$ eingesetzt.

Mit einem solchen für einen bestimmten Radius L des Bogens gültigen Satz von Plasmamparametern und charakteristischen Frequenzen wurde nun das

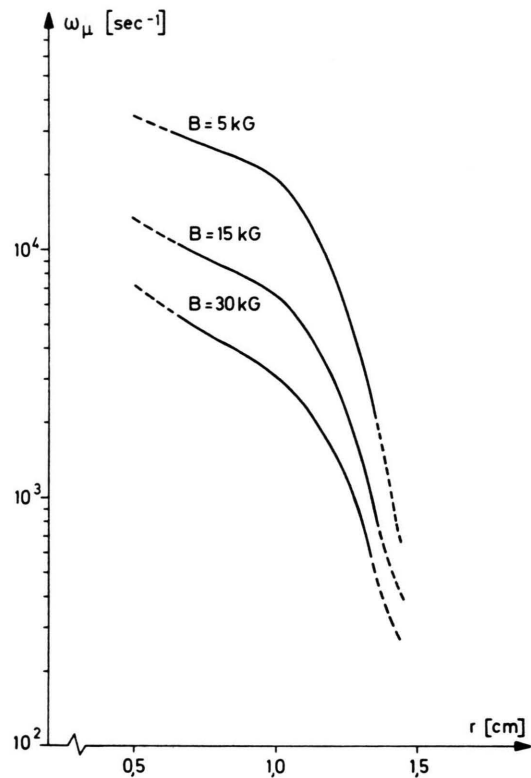
¹¹ J. RAEDER u. S. WIRTZ, Z. Naturforsch. **23a**, 1695 [1968].

¹² A. N. KAUFMANN, Phys. Fluids **3**, 610 [1960].

¹³ S. I. BRAGINSKI, in: Reviews of Plasma Physics, Vol. 1, M. A. LEONTOVICH, Ed. Consultants Bureau, New York 1965.

Abb. 3. Radialer Verlauf von ω_σ für verschiedene Magnetfeldstärken.Abb. 4. Radialer Verlauf von ω_χ für verschiedene Magnetfeldstärken.

Gleichungssystem (37) nach der Sekantenmethode¹⁴ gelöst. Dieses Verfahren hat den Vorteil, ohne Ableitungen auszukommen. Es werden jedoch geschätzte

Abb. 5. Radialer Verlauf von ω_μ für verschiedene Magnetfeldstärken.

Ausgangswerte benötigt, die bereits nahe an der Lösung liegen müssen, um Konvergenz zu gewährleisten. Hat man jedoch für ein bestimmtes m , L und B eine Lösung gefunden, so kann man z. B. bei festem L und m die Lösung auch für andere Magnetfeldstärken finden, indem man B leicht abändert und als Ausgangswert die vorherige Lösung verwendet. Um auch Lösungen für die höheren Moden bis $m = 20$ zu finden, wurde m ebenfalls kontinuierlich geändert, wobei natürlich nur die Resultate für ganzzahlige Werte sinnvoll sind. Für die speziellen Erfordernisse des vorliegenden Problems wurde ein vorhandenes Programm¹⁵ umgearbeitet. Schwierigkeiten bereitete vor allem das Auffinden geeigneter Ausgangswerte. Schließlich führte aber ein systematisches Vorgehen zum Ziel, bei welchem davon ausgegangen wurde, daß l_R von der Größenordnung m und l_I klein gegen l_R sein sollte. Wegen des großen betragsmäßigen Unterschiedes der Größen ω' und γ' einerseits und l_R und l_I andererseits erwies sich doppelte Rechengenauigkeit als notwendig.

¹⁴ P. WOLFE, Com. ACM Bd. 2, Nr. 12, S. 12–13 [1959].

¹⁵ R. E. FUNDERLIC u. I. RINZEL, Share Programm SDA 3334.

g) Ergebnisse

Die numerische Lösung des Gleichungssystems (37) für verschiedene Radien L ergab, daß die Anwachsrate einer festen Mode bei gegebener Magnetfeldstärke mit L zunimmt. Die Vermutung liegt nahe, daß dies nur der Fall ist, solange Ω konstant angenommen wird. Läßt man probeweise $d\Omega/dr \neq 0$ zu, — in Gl. (36 a) muß in diesem Fall der Term $ilm\omega' L \cdot d\Omega/dr$ addiert werden —, so zeigt sich eine drastische Reduktion der Anwachsrate. Aus diesem Grunde wurde in den Rechnungen $L = 1$ cm, das ist die Stelle maximaler Rotationsgeschwindigkeit, eingesetzt.

In Abb. 6 ist der Verlauf der Anwachsrate für die Moden $m=4$ bis $m=20$ in Abhängigkeit von der Magnetfeldstärke dargestellt. Bei kleinen Magnet-

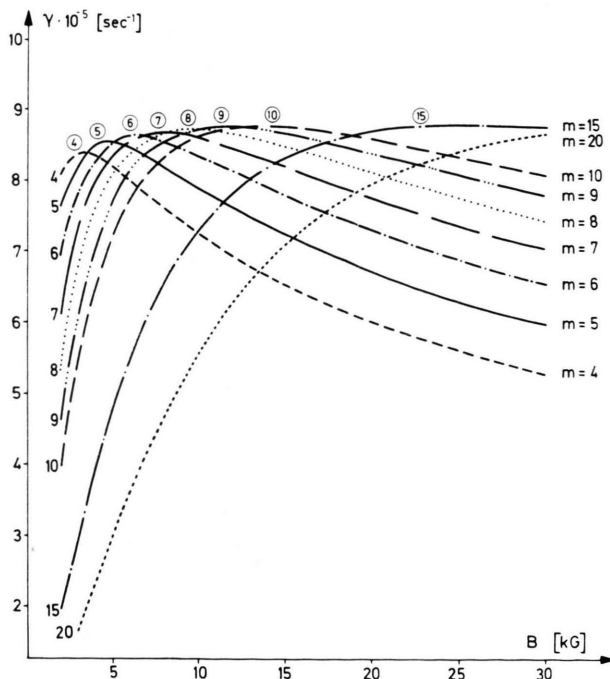


Abb. 6. Verlauf der Anwachsrate für die Moden $m=4$ bis $m=20$ in Abhängigkeit von der Magnetfeldstärke.

feldstärken besitzen die niedrigen Moden die größten Anwachsrate. Mit steigender Magnetfeldstärke wachsen jeweils höhere Moden am schnellsten an. Abbildung 7 zeigt die Frequenz in Abhängigkeit von m für vier verschiedene Magnetfeldstärken. In Abb. 8 ist das Verhältnis l_R/m dargestellt. Bemerkenswert ist, daß — insbesondere für hohe Moden — die radiale Wellenlänge etwa gleich der azi-

mutalen wird. Wie im Falle ohne Dissipation wird also auch hier die instabile Zone mit m schmaler.

Die Werte für l_I , die sich bei der Lösung ergeben, sind durchweg negativ und klein gegen l_R (Abb. 9). Abbildung 10 schließlich zeigt die Abhängigkeit der Anwachsrate von der Rotationsgeschwindigkeit Ω am Beispiel der Moden $m=5$, $m=10$, $m=15$ und $m=20$ bei einer Magnetfeldstärke von 15 kG. Für kleine Rotationsgeschwindigkeiten verschwinden die Anwachsrate im Rahmen der numerischen Genauigkeit. Anzumerken ist ferner, daß das Verhält-

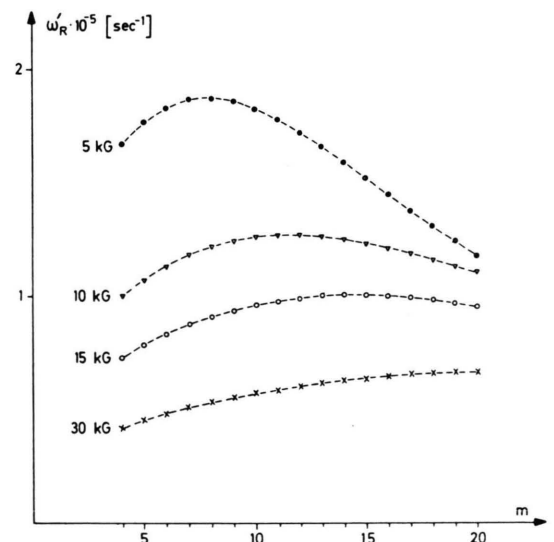


Abb. 7. Frequenz der Instabilität im mitrotierenden System bei verschiedenen Magnetfeldstärken.

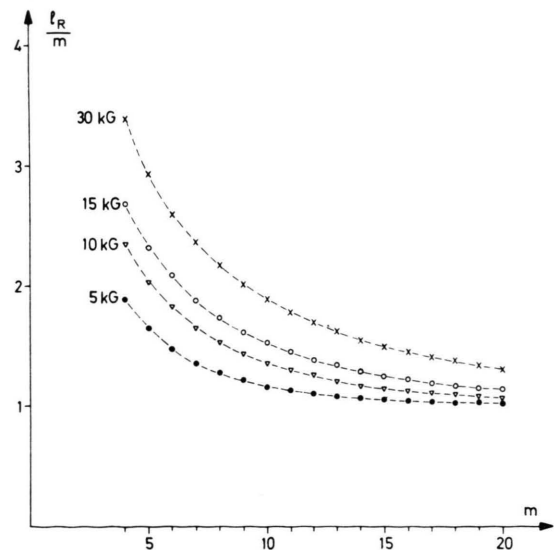
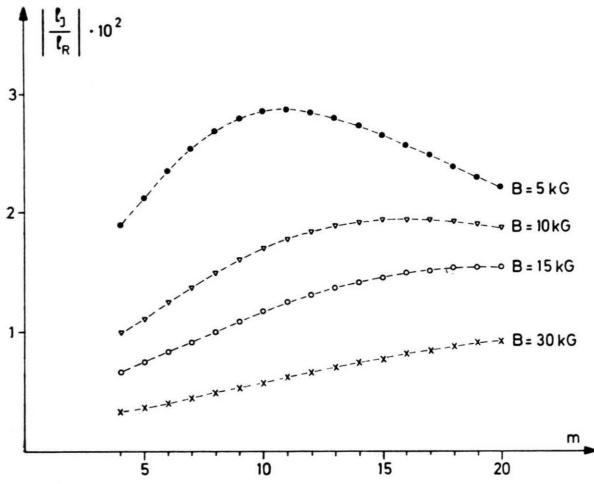
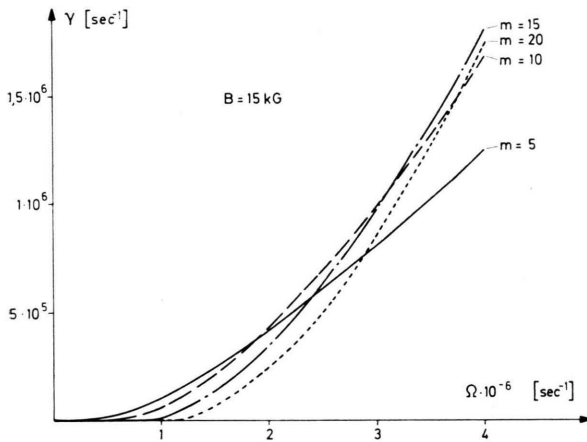


Abb. 8. Verhältnis von azimuthaler zu radialer Wellenlänge.

Abb. 9. Verhältniss von l_I zu l_R .Abb. 10. Verlauf der Anwachsraten bei $B=15$ kG in Abhängigkeit von der Winkelgeschwindigkeit Ω .

nis $|L \cdot U^*/v_r^*| = |A_{11}/A_{12}|$ der Unbekannten v_r^* und U^* des Gleichungssystems (34 a, b) in der Größenordnung 10^{-2} liegt, d. h. die Störungen verlaufen nahezu divergenzfrei.

IV. Diskussion

Die Resultate der erweiterten Theorie, die die dissipativen Effekte mit einschließt, zeigen, daß eine erhebliche Reduktion der Anwachsraten für Moden mit großer azimuthaler Wellenzahl gegenüber dem Fall ohne Dissipation auftritt. Der Vergleich der Werte der Magnetfeldstärke, bei welchen in Experiment ¹ die Moden $m=4$ bis $m=7$ auftreten, mit den Bereichen, in welchen sie auf Grund der Rech-

nung (Abb. 6) die größten Anwachsraten besitzen, zeigt, daß diese Bereiche bei niedrigeren Werten der Magnetfeldstärke liegen. Es ist anzunehmen, daß diese Unterschiede auf den Einfluß der Bogenzonen außerhalb des Maximums der Rotationsgeschwindigkeit zurückzuführen sind. Wenn nämlich in den Rechnungen ein $d\Omega/dr \neq 0$ zugelassen wird, so zeigt sich neben der erwähnten Reduktion der Anwachsraten auch eine Verschiebung des Kurvenbildes der Abb. 6 zu höheren Magnetfeldstärken hin.

In die gleiche Richtung geht auch der aus Abb. 10 ersichtliche Effekt, daß nämlich bei einer festen Magnetfeldstärke beim Übergang zu kleineren Rotationsgeschwindigkeiten niedrigere Moden größere Anwachsraten besitzen. Im Experiment deutet das Verhältnis $\omega/(m-1)\Omega$, das — wenn man für Ω den Wert $2,8 \cdot 10^6 \text{ sec}^{-1}$ einsetzt — bei etwa 0,6 liegt, ebenfalls darauf hin, daß die Zonen am Rand des Bogens, in denen die Rotationsgeschwindigkeit schon unter dem Maximalwert liegt, für die Instabilität mit von Bedeutung sind. Allerdings können Effekte dieser Art auf die Ergebnisse der Theorie lediglich modifizierend wirken, da sich im Experiment gezeigt hatte, daß Betrag und radialer Verlauf der Rotationsgeschwindigkeit in dem Magnetfeldbereich, in welchem die Instabilität beobachtet wurde, kaum von der Magnetfeldstärke abhängen, so daß hierdurch allein die beobachtete Magnetfeldabhängigkeit nicht erklärt werden könnte.

Beim Vergleich zwischen Theorie und Experiment muß man bedenken, daß die Rechnungen auf recht groben Annahmen basieren. Die Rechnung trägt in doppelter Weise Modellcharakter, da sowohl die Störungen als auch der ungestörte Zustand der Plasmasäule idealisiert wurden. Das dargelegte Modell kann daher nicht den Anspruch erheben, die Vorgänge in der instabilen Plasmasäule umfassend zu beschreiben. Sicher würde die Berücksichtigung des z -Stromes, der endlichen Bogenlänge und vor allem auch die Inhomogenität des Plasmas innerhalb der instabilen Zone zu Modifizierungen führen. Zusammenfassend können wir eine Übereinstimmung in dem Sinne feststellen, daß die dargelegte Theorie mit Dissipation das Resultat liefert, daß bei niedrigen Magnetfeldstärken Moden mit kleinem m die größten Anwachsraten besitzen, und daß mit steigender Magnetfeldstärke jeweils höhere Moden am schnellsten anwachsen. Dies kann das im Experiment beobachtete Auftreten höherer Moden mit steigender Magnetfeldstärke erklären.

Herrn Prof. Dr. R. WIENECKE danke ich für seine Förderung und das Interesse, das er dieser Arbeit entgegenbrachte. Herrn Dr. D. PFIRSCH und Herrn Dr. H. TASSO bin ich für wertvolle Ratschläge und Diskussionen dankbar. Ebenso danke ich Herrn H. GORENFLO

für die Durchführung der numerischen Rechnungen. — Diese Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

Hydrogen Plasma Production by Giant Pulse Lasers*

PETER MULSER

Institut für Plasmaphysik, Garching bei München

(Z. Naturforsch. 25 a, 282—295 [1970]; received 5 December 1969)

The problem of interaction of an intense laser beam with solid hydrogen is theoretically investigated in a one-dimensional plane geometry. The time dependent distributions of density, temperature and velocity of the produced plasma as well as those of the solid are found by numerical solution of the hydrodynamic equations for various laser powers. The maximum temperature can be approximately expressed in closed form as a function of the laser intensity and time. The calculations allow for the influence of thermal conduction and viscosity. At laser intensities above 1.8×10^{11} W/cm² the plasma frequency rises above that of the laser in the transition sheath between the hot plasma and the cold solid. The problem of absorption and reflection of laser radiation in this region is investigated.

I. Introduction

Nowadays giant pulse lasers reach intensities of 10^{12} W/cm² and more if focused with lenses of suitable focal length to an area of 10^{-4} cm². Emission thereby lasts between about 2 and 50 nsec. The interaction of such radiation fields with matter greatly differs from the usual picture of low-intensity electromagnetic waves passing through a medium. Numerous experiments since 1963 have demonstrated that a sufficiently intense laser will make transparent dielectrics opaque and cause a hot, dense plasma cloud to form on the surface.

Near the ruby laser frequency ($\omega = 2.73 \times 10^{15}$ sec⁻¹) many insulators such as hydrogen appear completely transparent; with normal light sources their coefficients of absorption are almost zero. If, however, there are some free electrons in the insulator, these in the intense radiation field of a laser can gain so much energy that they quickly increase in number as a result of collisional ionization, and strong absorption occurs. CARUSO et al.¹, for example, have calculated that at a radiation intensity of 10^{11} W/cm² a 100 μ thick hydrogen foil be-

comes opaque in less than 10^{-10} sec if there are 10^6 free electrons per cm³ present when irradiation begins, i. e. a vanishingly small number compared with the number of atoms, which for solid hydrogen is 4.5×10^{22} cm⁻³. No matter where the first free electrons originate — whether from multiphoton absorption, from impurities in which they were loosely bound or from external charging — it was found experimentally time and again that with sufficient laser intensity a highly absorbent layer of free electrons forms in a very short time. Any study of subsequent processes will therefore start from a certain initial ionization.

In the field of fusion research one is mainly interested in the complete evaporation of solid or liquid drops of low atomic weight in a focused laser beam. The production, heating, and expansion of such a plasma was therefore studied theoretically in a spherical model on the assumption that the matter in the focus is fully ionized from the outset, and that the energy input is uniformly absorbed in the drop as long as its diameter does not exceed that of the focus as a result of expansion²⁻⁴.

* Auszug aus der von der Fakultät für Maschinenwesen und Elektrotechnik der Technischen Hochschule München zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der Naturwissenschaften genehmigten Dissertation über „Erzeugung von Wasserstoffplasma durch Riesenimpulslaser“ des Dipl.-Phys. PETER MULSER. Tag der Promotion 31. 7. 1969.

Sonderdruckanforderungen an Dr. P. MULSER, Institut für Plasmaphysik, Experimentelle Plasmaphysik 3, D-8046 Garching bei München.

¹ A. CARUSO, B. BERTOTTI, and P. GIUPPONI, *Nuovo Cim.* 45 B, 176 [1966].

² J. M. DAWSON, *Phys. Fluids* 7, 981 [1964].

³ A. F. HAUGHT and D. H. POLK, *Phys. Fluids* 9, 2047 [1966].

⁴ W. J. FADER, *Phys. Fluids* 11, 2200 [1968].